COMBIEN DE NOMBRES TRANSCENDANTS ?

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1)**, **2)**, **3)**, **5)** et **6)** (pas la question **4)**).

— Piste rouge : tout le devoir.

On rappelle que pour tous ensembles E et F, on dit que F est *équipotent à* E s'il existe une bijection de E sur F.

1 UNE BIJECTION DE $\mathbb{N}^2$ SUR $\mathbb{N}$ ET SES ALENTOURS

On note f l'application $(m,n) \longmapsto \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$ définie sur $\mathbb{N}^2$. On se propose de montrer que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

1) Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et proposer une illustration graphique éclairante de sa bijectivité.

2) **a)** Exprimer $f(m,n+1)$ en fonction de $f(m+1,n)$, puis $f(n+1,0)$ en fonction de $f(0,n)$ pour tous $m,n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que f est surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

3) **a)** Montrer que pour tous $m,m',n,n' \in \mathbb{N}$: $\quad m'+n' \geqslant m+n+1 \quad \Longrightarrow \quad f(m',n') > f(m,n)$.

b) En déduire que f est injective sur $\mathbb{N}^2$.

4) **a)** Proposer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ — ou de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$, au choix.

b) Soient A,B,A',B' des ensembles. Montrer que si A et A' sont équipotents et si B et B' le sont aussi, alors il en va de même de $A \times B$ et $A' \times B'$.

c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^p$ sont équipotents.

2 RÉUNIONS AU PLUS DÉNOMBRABLES D'ENSEMBLES AU PLUS DÉNOMBRABLES

D'abord une définition.

Définition (Ensemble dénombrable/au plus dénombrable/indénombrable) Soit E un ensemble.

- On dit que E est *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.
- On dit que E est *au plus dénombrable* s'il est vide ou s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.
- On dit que E est *indénombrable* s'il n'est pas au plus dénombrable.

Nous avons vu par exemple que $\mathbb{R}$ est indénombrable. On peut montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable — mais comme aucune définition propre des ensembles finis n'a été donnée jusqu'ici, cette remarque n'est qu'une simple intuition.

5) Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides au plus dénombrables. Par hypothèse, il existe une injection φ_i de A_i dans $\mathbb{N}$ pour tout $i \in I$.

On pose $U = \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ et pour tout $x \in U$: $\quad m_x = \min\left\{ i \in I \mid \quad x \in A_i \right\} \quad$ et $\quad \theta(x) = \left(m_x, \varphi_{m_x}(x)\right)$.

a) Justifier la bonne définition de m_x pour tout $x \in U$.

b) Montrer que θ est injective.

c) En déduire que U est au plus dénombrable.

6) Soit I un ensemble au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables. Montrer que la réunion $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.

En résumé, toute réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est elle-même au plus dénombrable.

3 Combien de nombres transcendants ?

On commence là aussi par une définition.

Définition (Nombre algébrique, nombre transcendant) Un réel est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers et *transcendant* sinon.

7) **a)** Montrer que tout rationnel est algébrique.

b) Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{5}}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont algébriques.

Il semble ainsi facile de construire des nombres algébriques. Intuitivement, tant qu'on travaille avec des rationnels et qu'on se contente d'additionner, multiplier, diviser et passer à la racine $n^{\text{ème}}$, on ne quitte pas le monde des nombres algébriques.

Qu'en est-il des nombres transcendants ? Il est toujours difficile de montrer qu'un nombre donné est transcendant. On sait montrer que e et π le sont, c'est abordable en MPSI mais pas évident. Le *théorème de Gelfond-Schneider*, beaucoup plus difficile et démontré en 1934, énonce que pour tout nombre algébrique α distinct de 0 et 1 et pour tout nombre algébrique irrationnel β, α^β est transcendant. Par exemple, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est transcendant. Ces remarques donnent à penser que les nombres transcendants, parce qu'ils sont difficiles d'accès, sont rares. On va pourtant montrer qu'ils sont légion !

On note :

— pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_d$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d et à coefficients entiers,

— $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers,

— pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{Rac}(P)$ l'ensemble des racines réelles de P,

— $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

On **admet** enfin que pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, $\mathrm{Rac}(P)$ est un ensemble fini, donc au plus dénombrable

8) Montrer dans cet ordre que les ensembles $\mathscr{E}_d$, d décrivant $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}[X]$, puis $\mathbb{A}$ sont au plus dénombrables.

9) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ des nombres transcendants est indénombrable.

À l'issue de ce devoir, il existe une injection de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{N}$. De son côté, l'application $n \longmapsto n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{A}$ car $\mathbb{N} \subset \mathbb{A}$. Il découle ainsi du *théorème de Cantor-Bernstein* évoqué en cours que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{A}$ sont équipotents, i.e. que $\mathbb{A}$ est dénombrable. Conclusion : il y a infiniment plus de nombres transcendants que de nombres algébriques — et pourtant on n'en a pas exhibé un seul !